

Lista 1 (poziom rozszerzony)

Zad. 1 (3 pkt.) Niech $m = \log_3 2$ oraz $n = \log_2 10$. Wyraż $\log_9 100$ za pomocą m i n .

Zad. 2 (3 pkt.) Wyznacz równanie stycznej w punkcie $P = (-1, 3)$ do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2 - 7x}{x^2 + 2}$ określonej dla każdej liczby rzeczywistej x .

Zad. 3 (3 pkt.) Czworokąt $ABCD$ jest równoległobokiem takim, że $\overrightarrow{AB} = [-2, -3]$ oraz $\overrightarrow{AC} = [5, 8]$. Oblicz pole tego równoległoboku.

Zad. 4 (3 pkt.) Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x + 5} + \log_3 x$ dla wszystkich $x > 0$. Wykaż, że funkcja f ma co najmniej jedno miejsce zerowe należące do przedziału $[\frac{1}{3}, 9]$.

Zad. 5 (4 pkt.) Suma pięciu początkowych wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego (a_n) , określonego dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest równa 211, a suma S jego wszystkich wyrazów wynosi 243. Oznaczmy przez S_n sumę n początkowych wyrazów tego ciągu. Oblicz dla jakich liczb naturalnych n spełniona jest nierówność

$$\left| \frac{S_n}{S_n - S} \right| > 7.$$

Zad. 6 (4 pkt.) W zbiorze $[0, \pi]$ znajdź wszystkie rozwiązania równania

$$\cos 6x = \cos 2x.$$

Zad. 7 (4 pkt.) Oblicz sinus kąta ABC trapezu $ABCD$ wpisanego w okrąg o równaniu

$x^2 + y^2 - 38x + 22y - 96 = 0$ wiedząc, że punkt A ma obie współrzędne ujemne, odcinek AB tworzy dłuższą z podstaw tego trapezu, a przekątna AC trapezu zawarta jest w prostej o równaniu $y = x$.

Zad. 8 (4 pkt.) Pan Kowalski obliczył, że wygrywa 70% wszystkich rozegranych z synem partii szachowych. Oblicz, ile partii szachów musi rozegrać z synem, aby prawdopodobieństwo wygrania przez ojca przynajmniej jednej partii w całej rozgrywce było większe od 0,99.

Zad. 9 (5 pkt.) Punkt O jest środkiem symetrii podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego $ABCDE$. Obwód podstawy $ABCD$ jest pięć razy mniejszy niż suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa. Przez przekątną AC podstawy i środek S krawędzi bocznej BE poprowadzono płaszczyznę. Oblicz stosunek pola otrzymanego przekroju do pola podstawy ostrosłupa oraz miarę kąta BSO .

Zad. 10 (6 pkt.) Okrąg o równaniu $(x - 8)^2 + (y - 4)^2 = 16$ jest wpisany w trójkąt ABC , gdzie $A = (9, 12)$. Oblicz współrzędne punktu styczności tego okręgu z prostą BC wiedząc, że $y = \frac{1}{2}x$ jest równaniem prostej zawierającej dwusieczną kąta ABC tego trójkąta.